（論文）

円管の電磁成形を対象とした電磁力シミュレータ

Electromagnetic Force Simulator for Electromagnetic Tube Forming



細井寛哲＊ Hiroaki HOSOI　今村美速＊ Yoshihaya IMAMURA　福元裕彦＊＊ Dr. Hirohiko FUKUMOTO

For electromagnetic tube forming, an electromagnetic force simulator which contains circuit and electromagnetic field simulator has been developed. In this simulator, pipe deformation is eliminated, and transient electromagnetic force distributions are obtained through two sequence procedures; calculation of inductor current from equivalent circuit model and calculation of electromagnetic field. Applying this simulator to expansion of pipe which is shorter than inductor, it is confirmed that strong radial expansion and axial compression force is generated around the pipe end.

まえがき＝電磁力を利用した成形法（電磁成形法）は，1960年代に米国で考案[1)]された高エネルギー速度加工の一種で，高速変形，および非接触加工が特徴である。同成形法は，プレス成形法と比較して金型点数削減が可能であり，成形と接合の同時加工による工程削減や複雑形状の成形なども期待できるため，実用化に向けた研究が行われてきた[2), 3)]。

当社においても，電磁成形法によってアルミニウム合金円管を拡管加工し，バンパステイとして利用したアルミニウム合金製バンパシステム（図1）を開発した。同システムは，従来の鋼製バンパシステムと比較して軽量であることに加え，成形と接合を同時に行うことによるトータルコスト削減を達成した[4)]。

一方，電磁成形は電気回路，電磁場，動的変形が複雑に関係した，変形時間10^{-4}sオーダの高速変形現象であるため，変形挙動の把握ならびに装置の適正化が難しいという課題があった。これを解決するため，用途に応じてさまざまなシミュレーション手法による検討が行われている[5)～10)]。

筆者らは，電磁成形に適し最も用途の広い有限長円管の電磁成形を対象に，半径方向の均一変形のみを考慮することで，簡便に円管の変形挙動を計算できる電磁成形シミュレーション技術を開発した[11)]。ただ，同モデルでは電磁力の算出に１次元の仮定をおくため，円管胴部の変形を良好に予測するものの，円管端部の変形については正確に予測できない傾向がみられた。

電磁成形全体の挙動を正確に模擬するには，回路，電磁場，動的変形を各時間ステップで連成させた数値計算を行う必要があり，モデル構築の難易度の高さと計算時間の長さに課題がある。

そこで筆者らは，これまでに構築したシミュレーション技術を拡張し，簡易性を重視して，円管が初期形状を保つとしたときに円管に生じる電磁力分布を求めるシミュレータを開発した。ここに，開発したシミュレータの構成と計算例を報告する。

1．電磁成形の原理と電磁力シミュレータの構成

1.1　電磁成形の原理

円管を電磁拡管成形するときの一般的な装置構成を図2に示す。電磁成形は，電気エネルギーを被加工材の変

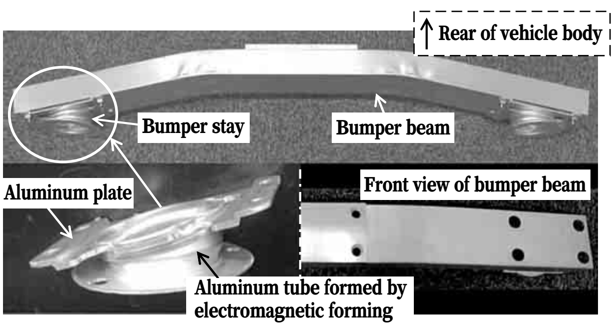

図1　電磁拡管成形を利用したアルミニウム合金製バンパシステム
Fig. 1　Aluminum alloy bumper system using electromagnetic pipe expanding

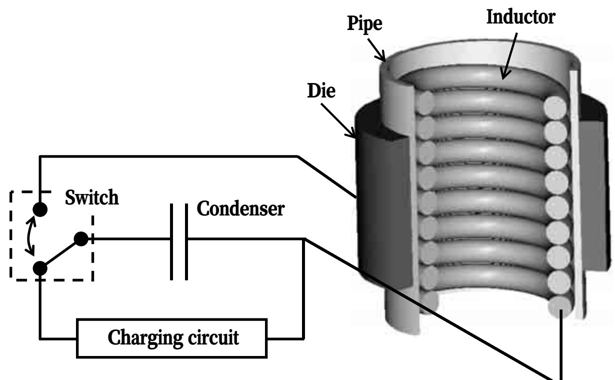

図2　電磁拡管成形の装置構成
Fig. 2　Device configuration of electromagnetic pipe expanding

＊アルミ・銅カンパニー　技術部　＊＊株式会社コベルコ科研

形に用いるものであるが，そのメカニズムは以下となる。

①コンデンサに蓄えた電気エネルギーをインダクタへ瞬間的に解放する。

②インダクタに大電流が流れ，周囲に強磁場がつくられる。

③インダクタ近傍の円管には，相互誘導による渦電流が誘起され，電磁力が生じる。

④円管は電磁力により塑性変形し，金型に拘束されて変形が終了する。

1.2　電磁力シミュレータの構成

開発した電磁力シミュレータは，回路シミュレータと電磁場シミュレータの二つからなる。

回路シミュレータでは，図2の装置構成を等価回路に近似し，回路方程式を解くことでインダクタの電流波形を求める。電流波形を求める際に必要な回路パラメータは，各種の近次式によって事前に見積っておく。

電磁場シミュレータでは，回路シミュレータで得られたインダクタ電流波形をもとに，インダクタ周辺の電磁場を有限要素法（FEM）で求め，円管に誘起される電流および発生する電磁力を求める。

以下では，回路シミュレータおよび電磁場シミュレータの概要を述べる。

1.3　回路シミュレータ

図2の装置構成を，一次回路（LCR直列回路）と円管回路（LR直列回路）が相互インダクタンスMで磁気的に結合した図3のような等価回路として近似する。図3中で用いた記号を以下に示す。

V_0：投入電圧
C_1：コンデンサ容量
I_1：一次回路電流（インダクタ電流）
L_1：一次回路の自己インダクタンス
R_1：一次回路抵抗
M：円管-インダクタ間の相互インダクタンス
I_p：円管の電流
L_p：円管の自己インダクタンス
R_p：円管の抵抗

一次回路は直列回路であることから，I_1はインダクタ電流に等しい。回路パラメータ（V_0，C_1，R_1，R_p，L_1，L_p，M）が時間によらず一定とみなせば，一次回路，円管それぞれの回路方程式は以下のように表せる。

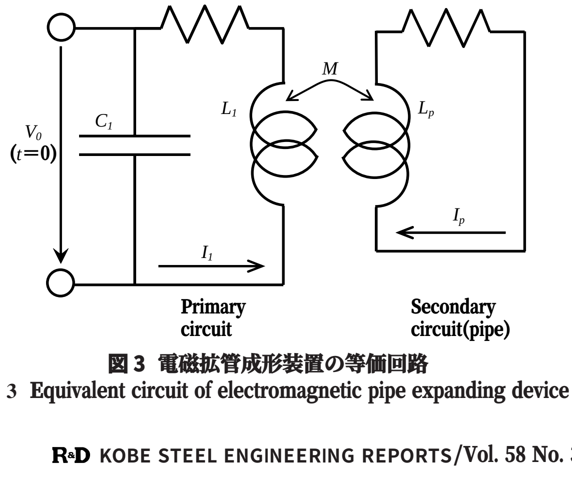

図3　電磁拡管成形装置の等価回路
Fig. 3　Equivalent circuit of electromagnetic pipe expanding device

$$L_1\frac{d}{dt}I_1(t)+R_1I_1(t)+M\frac{d}{dt}I_p(t)=V_0-\frac{1}{C_1}\int_0^t I_1(\tau)d\tau \quad \cdots(1)$$

$$L_p\frac{d}{dt}I_p(t)+R_pI_p(t)+M\frac{d}{dt}I_1(t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

tは通電開始からの時刻を表す。式(1)，(2)を連立し，初期条件$I_1=I_p=0$の下で解けばインダクタ電流I_1が得られる。

式（1），（2）を解く上で必要な回路パラメータR_1，R_p，L_1，L_p，Mの導出には次の仮定を置く。

①インダクタ電流は，導線断面の中心位置（半径r_{id}）に集中する。

②円管を流れる渦電流密度の周方向成分$J_{e\theta}$は，長手方向で一定であり，表皮効果[12]を考慮した半径位置$r_{p,\,eff}$に集中する。$r_{p,\,eff}$の導出は文献[11]に従う。

一次回路抵抗R_1は，導電率σ，長さl，通電に寄与する断面積Sの導線の抵抗Rが次式で表される[13]ことを利用して計算する。

$$R=\frac{1}{\sigma}\frac{l}{S} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

円管の抵抗R_pは，式(3)と同様にして次式で表される。

$$R_p=\frac{1}{\sigma_p}\frac{\pi r_{p,\,eff}}{l_p(r_{p,\,eff}-r_p)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

σ_p，l_p，r_pは，それぞれ円管の導電率，長さ，内半径である。

一次回路の自己インダクタンスL_1には，インダクタの自己インダクタンスL_{id}のほかに，配線部などが有する自己インダクタンスが含まれるが，通常，後者はL_{id}に比べて小さい。L_{id}には有限長ソレノイドに対する以下の公式[14]を用いる。

$$L_{id}=\kappa\cdot\frac{\mu_0 n^2\pi r_{id}^2}{l_{id}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

μ_0は真空中の透磁率，n，l_{id}はそれぞれインダクタの巻数，巻き線部長さである。また，κは長岡係数であり楕円積分を含んだ無次元数$2r_{id}/l_{id}$の関数である。

円管の自己インダクタンスL_pは，円管を巻数mが無限大で，電流が$1/m$倍の有限長ソレノイドコイルとみなし，ノイマンの公式[15]を適用することによって，次式で表される。

$$L_p=\frac{\mu_0 r_{p,\,eff}}{4\pi}\left(\lim_{m\to\infty}\int_0^{2m\pi}\int_0^{2m\pi}\frac{m^{-2}\{\cos(\theta-\phi)+(l_p/r_{p,\,eff})^2(2m\pi)^{-2}\}}{\sqrt{2-2\cos(\theta-\phi)+(l_p/r_{p,\,eff})^2((\theta-\phi)/2m\pi)^2}}\,d\theta d\phi\right) \quad \cdots(6)$$

式（6）は複雑なため，右辺〔　〕内が円管寸法の無次元数$l_p/r_{p,\,eff}$のみに依存することに着目し，以下の近似式を導いた。

$$L_p=\frac{\mu_0 r_{p,\,eff}}{4\pi}\exp(-0.07901\xi^2-0.5719\xi+3.022) \quad \cdots(7)$$

無次元数$\ln(l_p/r_{p,\,eff})$を変数とし，ξと置いている。$l_p/r_{p,\,eff}$が0.1から10の実用的な範囲において，式（7）と式（6）の差異は3%以内と小さく，近似は妥当と考えられる。

インダクタと円管の間の相互インダクタンスMは，次の同軸ソレノイドコイルに対する公式[16]を利用して求める。

$$M=\frac{\mu_0 n\pi r_{id}{}^2}{l_{id}l_p}\left\{\sqrt{r_{p,eff}{}^2+\left(\frac{l_{id}+l_p}{2}\right)^2}-\sqrt{r_{p,eff}{}^2+\left(\frac{l_{id}-l_p}{2}\right)^2}\right\} \cdots(8)$$

1.4 電磁場シミュレータ

ここでは，電磁場を解く上での支配方程式および有限要素法の全体節点方程式を導出するまでを示す。

まず，変位電流がない場合のマクスウェル方程式は以下で表される。

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t} \cdots\cdots(9)$$

$$\nabla\times H=J_0+J_e \cdots\cdots(10)$$

E は電界，B は磁束密度，H は磁界，J_0 は強制電流密度，J_e は渦電流密度である。J_e と E，B と H には次の関係が成り立つと仮定する。

$$J_e=\sigma E \cdots\cdots(11)$$

$$B=\mu H \cdots\cdots(12)$$

σ，μ はそれぞれ媒質の導電率，透磁率である。また，$\nabla\cdot B=0$ から次式で与えられる磁気ベクトルポテンシャル A が導入できる。

$$B=\nabla\times A \cdots\cdots(13)$$

式（9）～（13）から B，H，J_e を消去すれば，以下の A と J_0 の関係が得られる。

$$\sigma\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times A\right)+\sigma\nabla\phi=J_0 \cdots\cdots(14)$$

ϕ は静電スカラーポテンシャルである。円柱座標系（r，θ，z）の軸対称問題においては $J_0=(0,\ J_{0\theta},\ 0)$，$A=(0,\ A_\theta,\ 0)$ および $\nabla\phi=0$ が得られ，さらに A を一義的に決定するためのクーロンゲージ（$\nabla\cdot A=0$）[17] を導入すれば，式（14）から次式が得られる。

$$\sigma\frac{\partial A_\theta}{\partial t}-\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\right]=J_{0\theta} \cdots(15)$$

上式が，場の変数に A_θ を採るときの電磁場の支配方程式となる。式（15）を重み付き残差法の一種であるガラーキン法で離散化[18] すると，解析領域全節点の A_θ に対する以下の全体節点方程式が得られる。

$$\frac{1}{\Delta t}\sum_{ie}[D_{ie}]\{A_{s+1}-A_s\}+\sum_{ie}[K_{ie}]\{A_{s+1}\}=\sum_{ie}\{f_{ie,\,s+1/2}\} \cdots(16)$$

［ ］は行列，{ } はベクトルを表す。また，添え字 ie は要素番号，Δt は時間刻み，s は時間ステップ，$\{A\}$ は全節点の A_θ を表す。$[D_{ie}]$，$[K_{ie}]$，$\{f_{ie}\}$ は，それぞれ式（15）の左辺第1項，左辺第2項，右辺に対応しており次式で与えられる。

$$[D_{ie}]=\iint_{S_{ie}}\sigma_{ie}\{N_{ie}\}\{N_{ie}\}^T 2\pi r drdz \cdots\cdots(17)$$

$$[K_{ie}]=\iint_{S_{ie}}\frac{1}{\mu_{ie}}\left([B_{ie}][B_{ie}]^T+\frac{1}{r^2}\{N_{ie}\}\{N_{ie}\}^T\right)2\pi r drdz \cdots(18)$$

$$\{f_{ie}\}=\iint_{S_{ie}}J_{0\theta}\{N_{ie}\}2\pi r drdz \cdots\cdots(19)$$

$\{N\}$ は要素形状関数ベクトル，$[B]$ は微分作用素行列を表す。

本シミュレータでは，式（16）を用いて，インダクタ要素に強制電流密度 $J_{0\theta}$ を与えたときの，モデル化領域全節点の A_θ を各時間ステップで計算する。$J_{0\theta}$ はインダクタ電流 I_l が導線断面に均一に分布するとして次式で計算する。

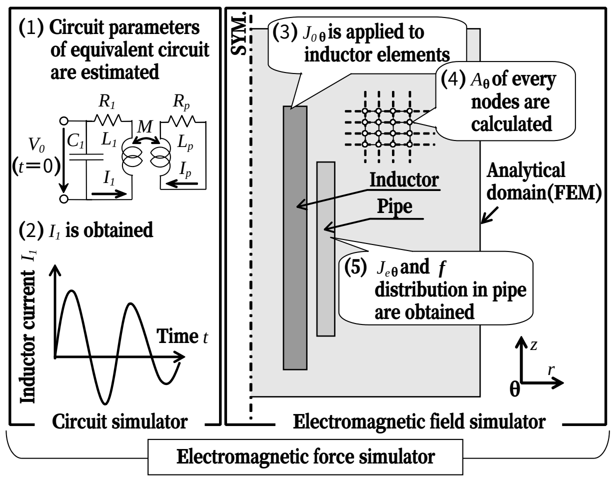

図4 電磁力シミュレータの概要
Fig. 4 Schematic view of electromagnetic force simulator

$$J_{0\theta}=nI_l/S_{id} \cdots\cdots(20)$$

ここで S_{id} は電磁場シミュレーションモデルにおけるインダクタ要素の総断面積である。

$J_{e\theta}$ ならびに電磁体積力 f（f_r，f_θ，f_z）は，評価点周辺節点の A_θ から次式で求められる。

$$J_{e\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\right\}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \cdots\cdots(21)$$

$$f=J_e\times B=J_{e\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z}+\frac{A_\theta}{r},\ 0,\ -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \cdots\cdots(22)$$

また，薄肉円管を対象に，円管の単位長さ，単位周長あたりに作用する電磁力を磁気圧力 P（P_r，P_z）として定義する。円管高さ位置 z における P は，f を肉厚方向に積分した次式で求まる。

$$P(z)=\int_{r_p}^{r_p+T_p}f(r,z)dr \cdots\cdots(23)$$

T_p は円管の肉厚である。

図4に回路シミュレータと電磁場シミュレータから構成される電磁力シミュレータの概要と計算フローをまとめて示す。

2．電磁力シミュレーション

2.1 計算条件

開発したシミュレータをアルミニウム合金円管の電磁成形に適用し，円管に作用する電磁力分布を計算した。想定した寸法条件を，電磁場シミュレータの解析モデルと合せて図5に示す。本計算では，インダクタに比べて円管が十分に短い場合を想定する。円管にはアルミニウム合金 6063-T1 押出形材（$\sigma=2.9\times10^7\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$）を仮定した。また，投入電圧 V_0 およびコンデンサ容量 C_1 はそれぞれ 11,000V，400μF とし，R_1，R_p，L_1，L_p，M は1.3節の計算方法に従って計算した。表1に回路パラメータを示す。

電磁場シミュレータでは，インダクタの導線部分，円管，空気の3種のみを考慮し，一次四辺形要素によりモデル化した。インダクタ導線と空気要素の導電率 σ はゼロとし，全要素の透磁率 μ は真空中の値 μ_0（4π×

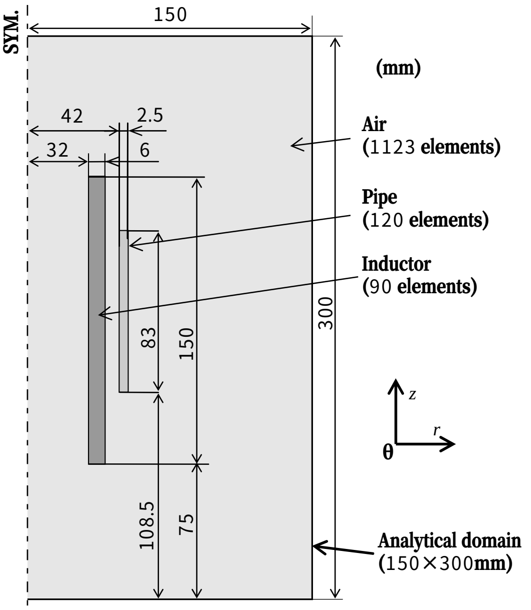

図5 寸法条件と電磁場シミュレータの解析モデル
Fig. 5 Dimensional conditions and analytical model of electromagnetic field simulator

表1 回路パラメータ
Table 1 Circuit parameters

V_0 (V)	1.1×10^{4}	M (H)	5.6×10^{-7}
C_1 (F)	4.0×10^{-4}	L_p (H)	5.8×10^{-8}
L_1 (H)	1.5×10^{-5}	R_p (Ω)	5.6×10^{-5}
R_1 (Ω)	2.0×10^{-2}		

$10^{-7}\mathrm{Hm}^{-1}$）を与えた。外部領域の境界条件には半無限要素[19]を適用した。

2.2 計算結果および考察

回路シミュレータで計算したインダクタ電流波形を図6に示す。インダクタ電流波形は減衰のある正弦波状になり，半周期が約180μsで，90μs付近においてピーク値65,000Aを示した。

各時刻（t=25, 75, 100, 150, 200μs）における半径方向磁気圧力P_rの分布を図7に示す。P_rは電流がピークを迎える手前（t= 75μs）付近までは胴部がほぼ一定で，端部側ほど急激に大きくなる分布を示し，インダクタ電流に応じて大きくなることが分かる。また，100μs以降から先端部より先にP_rの低下がはじまり，150μsでは先端部近傍でわずかに縮管方向のP_rが発生していることが確認できる。

各時刻における軸方向磁気圧力P_zの分布を図8に示す。P_zは，円管高さ中心に対して点対称の分布を示し，先端から約10mmの範囲にのみ生じることが分かる。変形初期には先端部で最大の軸圧縮力が生じるが，150μsでは先端部で円管を伸張させる方向の力が生じていることが分かる。

次に円管の代表的な高さ位置（0(底部)，$l_p/8$，$l_p/4$，$l_p/2$(中心高さ)）におけるP_rおよびP_zの経時変化を，インダクタ強制電流波形と重ねてそれぞれ図9，図10に示す。

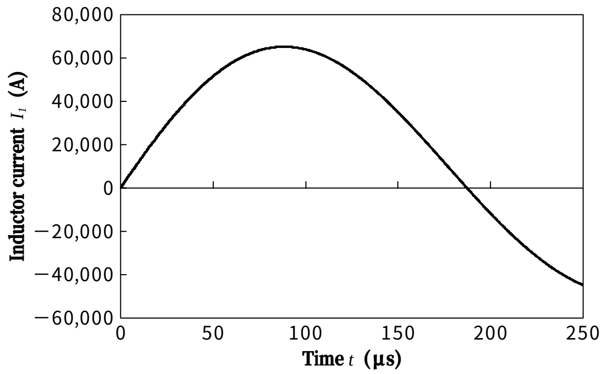

図6 インダクタ電流波形
Fig. 6 Inductor current waveform

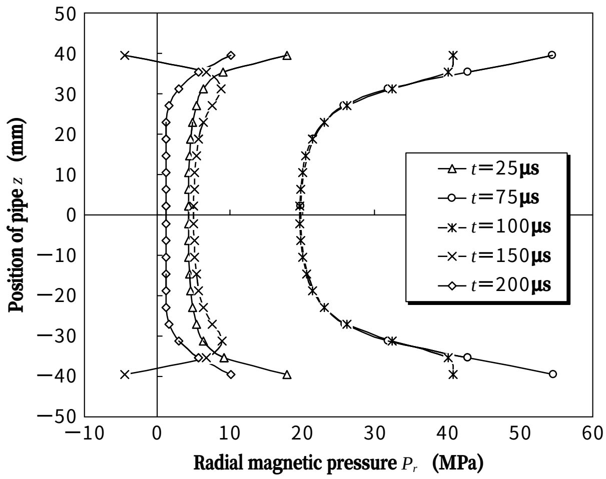

図7 半径方向磁気圧力P_rの分布
Fig. 7 Radial magnetic pressure P_r distribution

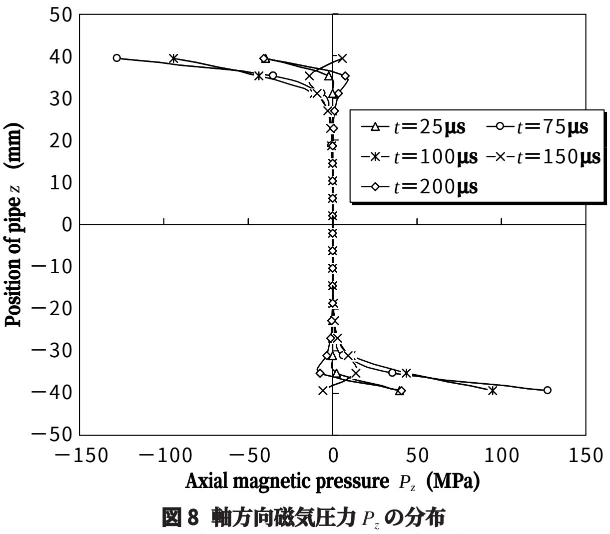

図8 軸方向磁気圧力P_zの分布
Fig. 8 Axial magnetic pressure P_z distribution

図9よりP_rは周期的に変動するが，その波形は位置により異なることが確認できる。円管高さの$l_p/8$，$l_p/4$，$l_p/2$(中心)位置のP_r波形は，円管端部ほど振幅は大きくなるものの波形自体は類似しており，周期はインダクタ電流波形のほぼ1/2周期となることが分かる。一方で，先端部（底部）のP_r波形は，振幅が最も大きくなるとともに周期も他の位置に比べて短くなる。また，140μsから180μsの時刻では特異的に縮管方向の力が生じることが確認できる。図10より，先端部のP_z波形は，先端部のP_r波形に類似することも確認できる。

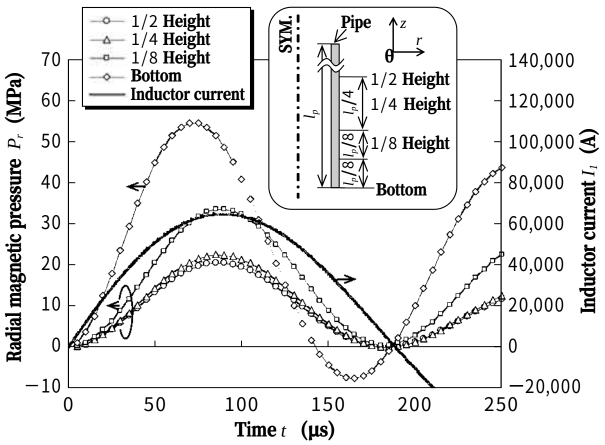

図9 半径方向の磁気圧力 P_r の経時変化
Fig. 9 Change of radial magnetic pressure P_r

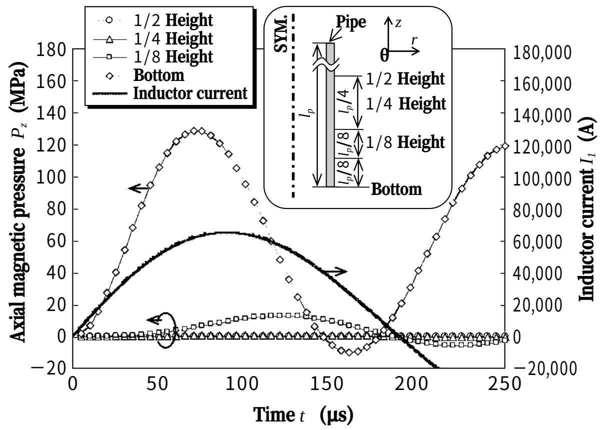

図10 軸方向磁気圧力 P_z の経時変化
Fig.10 Change of axial magnetic pressure P_z

図11 円管の電磁拡管成形結果
Fig.11 Electromagnetic pipe expanding result

なお，円管の変形を考慮した場合には，式（7），(8）から，拡管変形（$r_{p,\,eff}$ 増加）に応じて M の低下および L_p の増加が起きることが分かる。この回路パラメータ変化に伴い，回路方程式（1），(2）から近似的に求められる円管の誘導電流 I_p は急激に減衰するため，円管が変形しないと仮定した場合に比べて磁気圧力の低下も急激となる。従って，電流周期に比べて極端に変形が遅くなる条件を除けば，第2波以降の磁気圧力が変形に及ぼす影響は小さいものと推測される。

図7，図8に示す磁気圧力分布から，金型で拘束せずに円管を電磁成形した場合，円管は端部に半径方向と軸方向の強い磁気圧力を受け，端部が外側に倒れた“つづみ状”に変形すると推測される。図5と同じ寸法の円管およびインダクタを用いて自由拡管試験を行った結果を図11に示す。同図より円管はつづみ状に変形していることが確認でき，本シミュレータによる電磁力分布予測の妥当性がうかがえる。

むすび＝電磁成形時の円管に生じる電磁力分布の詳細を予測するため，回路シミュレータと電磁場シミュレータからなる電磁力シミュレータを開発した。ここでは簡易性を重視し，円管の変形は考慮していない。開発したシミュレータを用いて，インダクタに対し円管が十分に短いときの電磁拡管時の磁気圧力分布を調査し，以下の知見を得た。

①インダクタ電流が最大となる時刻付近において，半径方向磁気圧力 P_r は拡管方向に生じ，胴部でほぼ一定で，端部側ほど急激に大きくなる分布を示す。また，軸方向磁気圧力 P_z は端部においてのみ軸圧縮方向に生じる。

②各高さ位置における磁気圧力は，P_r，P_z ともに周期的に変動する。その最大値は，端部ほど大きくなる傾向があり，周期は円管端部のみ短くなる傾向を示す。

③付録で示すように，円管の抵抗 R_p が十分に小さいとき，一般に円管胴部の P_r 波形は式（28）で近似できる。

変形初期に発生する磁気圧力波形と円管の変形量の間には明確な関係が存在すると推測される。磁気圧力波形と変形量を関係付けることができれば，円管を所定の形状に成形する場合の装置構成の適正化などへの応用も期待できる。

付録　半径方向磁気圧力 P_r 波形について

今回計算した条件において，円管胴部の P_r 波形が図9のようになり，インダクタ電流の1/2周期にほぼ一致した理由を考える。まず，円管に作用する電磁体積力 f の周方向成分 f_r は，フレミングの左手の法則から次式で与えられる。

$$f_r = J_{e\theta} B_z = -J_{e\theta}(B_{z,\,id} + B_{z,\,p}) \quad \cdots\cdots(24)$$

ここで，$B_{z,\,id}$，$B_{z,\,p}$ はインダクタ電流および円管電流に由来する軸方向の磁束密度である。$B_{z,\,id}$ は I_1 に比例する。また，$J_{e\theta}$ および $B_{z,\,p}$ も，胴部ではほぼ I_p に比例すると考えられる。これらの関係を用いれば，式（24）から次式が導かれる。

$$f_r \approx \alpha_1 I_1 I_p + \alpha_2 I_p^2 \quad \cdots\cdots(25)$$

ここで α_1，α_2 は定数である。一方，式（2）において，円管の抵抗 R_p が十分に小さい場合，左辺第2項の影響が低下し，初期条件（$I_1 = I_p = 0$）から次の近似的な関係が導かれる。

$$I_p(t) \approx -(M/L_p) I_1(t) \quad \cdots\cdots(26)$$

式（26）が成り立つとして式（1）を解けば，R_1 が非常

に大きい場合を除き，その解は次式となる。

$$I_1(t) \approx e^{-\gamma t}\sin\omega t \quad \cdots\cdots(27)$$

ここで，γ，ωは一次回路電流の減衰の速さと角速度を表す。式（26），（27）を式（25）に代入し，P_r が f_r に比例することを利用すれば次式が導かれる。

$$P_r \propto f_r \propto (e^{-\gamma t}\sin\omega t)^2 = e^{-2\gamma t}\frac{1-\cos 2\omega t}{2} \quad \cdots\cdots(28)$$

上式は，R_P が十分に小さいときの円管胴部の P_r 波形を表している。式（28）は図 9 の円管胴部の P_r 波形に類似し，妥当な近似であることが確認できる。円管が変形せず，R_P が十分に小さいことを前提とするが，実験において測定可能なインダクタ電流から，円管電流および円管胴部の磁気圧力が式（26），（28）のように近似できることを確認した。

参 考 文 献

1） Jausen, H. et al.：IEEE Trans, Ind. Appl, IGA-4（1968）, pp.428-432.
2） Al-Hassani et al.：J. Mech. Eng. Sci. , Vol.16, No.1（1974）, pp.1-9.
3） 張海ほか：塑性と加工, 第 34 巻, 392 号（1993）, pp.1028-1033.
4） 橋本成一ほか：R&D 神戸製鋼技報, Vol.57, No.2（2007）, pp.65-68.
5） 高津宣夫ほか：日本機械学会論文集（C）, Vol.53, No.493（1987）, pp.2042-2047.
6） 高津宣夫ほか：日本機械学会論文集（C）, Vol.53, No.496（1987）, pp.2711-2716.
7） 高津宣夫ほか：日本機械学会論文集（C）, Vol.53, No.496（1987）, pp.2717-2723.
8） 佐野利男ほか：機械技術研究所報告, 第 150 号（1990）, pp.32-35.
9） 村田真ほか：日本機械学会論文集（C）, Vol.58, No.554（1992）, pp.3140-3142.
10） Gregg K. Fenton et al.：J. of Mat. Proc. Tech., 75（1998）, pp.6-16.
11） 細井寛哲ほか：第 58 回塑性加工連合講演会講演論文集,（2007）, pp.317-318.
12） 大久保仁ほか：電磁気学,（1993）, p.167, 昭晃堂.
13） 山田直平ほか：電気磁気学,（2002）, p.143, 電気学会.
14） 山田直平ほか：電気磁気学,（2002）, p.288, 電気学会.
15） 山田直平ほか：電気磁気学,（2002）, p.283, 電気学会.
16） 岡川啓悟ほか：塑性加工春季講演会講演論文集,（1999）, pp.395-396.
17） 山田直平ほか：電気磁気学,（2002）, p.204, 電気学会 .
18） 中田高義ほか：電気工学の有限要素法,（1986）, p.46, 森北出版.
19） 守屋一政：日本機械学会論文集（C）, Vol.50, No.451（1984）, pp.495-503.